

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

`zakh@cs.msu.su`

`http://mk.cs.msu.su`

Лекция 6.

Общая схема метода резолюций.

Равносильные формулы.

Теорема о равносильной замене.

Предваренная нормальная форма.

Сколемовская стандартная форма.

Системы дизъюнктов.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi ?$$

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости.

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg \varphi$$

φ общезначима $\iff \varphi_0$ противоречива.

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_0 равносильна φ_1 , т. е. $I \models \varphi_0 \iff I \models \varphi_1$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_k} (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_1 противоречива $\iff \varphi_2$ противоречива.

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, D_2, \dots, D_N\},$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{im_i}$.

φ_2 противоречива $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 5. Резолютивный вывод тождественно ложного (противоречивого) дизъюнкта $\square$ из системы S_φ .

Правило резолюции *Res* :
$$\frac{D_1 = D'_1 \vee L, D_2 = D'_2 \vee \neg L}{D_0 = D'_1 \vee D'_2}.$$

Дизъюнкт D_0 называется **резольвентой** дизъюнктов D_1 и D_2 .

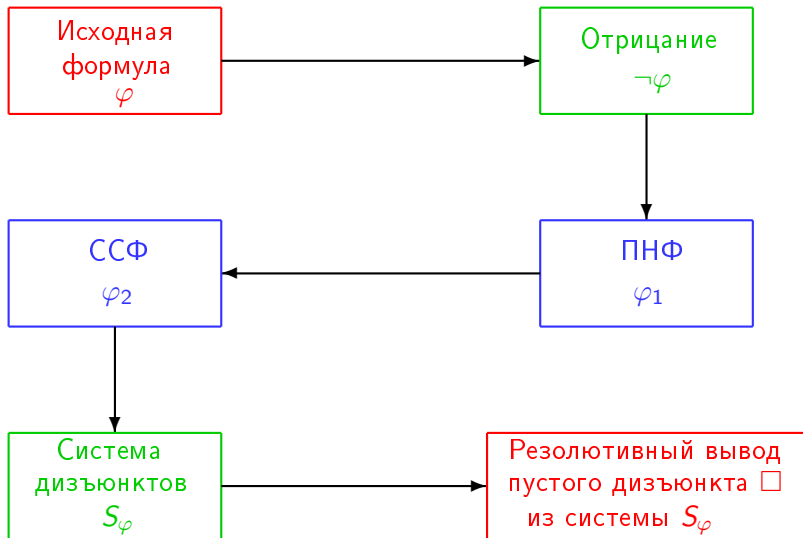
Резольвенты строят, пока не будет получен **пустой дизъюнкт** $\square$.
Это возможно в случае $D_1 = L, D_2 = \neg L$:

$$\frac{D_1 = L, D_2 = \neg L}{D_0 = \square}$$

Система дизъюнктов S_φ противоречива $\Leftrightarrow$ из S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ИТОГ. Формула φ общезначима $\Leftrightarrow$ из системы дизъюнктов S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИИ



РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введем вспомогательную логическую связку **эквиваленции** $\equiv$.

Выражение $\varphi \equiv \psi$ — это сокращенная запись формулы $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$.

Определение

Формулы φ и ψ будем называть **равносильными**, если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, т. е. $\models (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$.

Утверждение.

1. Отношение равносильности — это отношение эквивалентности.
2. Если формула φ общезначима (выполнима) и равносильна ψ , то формула ψ также общезначима (выполнима), т. е.

$$\models \varphi \text{ и } \models \varphi \equiv \psi \implies \models \psi$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

1. Удаление импликации. $\models \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$,

2. Переименование переменных.

$$\models \forall_{\exists} x \varphi(x) \equiv \forall_{\exists} y \varphi(y),$$

здесь формула $\varphi(x)$ не содержит свободных вхождений переменной y , а формула $\varphi(y)$ не содержит свободных вхождений переменной x .

3. Продвижение отрицания.

$$\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi,$$

$$\models \neg(\varphi \& \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi,$$

$$\models \neg\forall_{\exists} x \varphi \equiv \exists_{\forall} x \neg\varphi,$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

4. Вынесение кванторов.

$$\models \forall x \varphi(x) \& \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \& \psi),$$

$$\models \forall x \varphi(x) \vee \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \vee \psi),$$

здесь формула ψ не содержит свободных вхождений переменной x ,

5. Законы булевой алгебры.

$$\models \varphi \&_{\vee} \psi \equiv \psi \&_{\vee} \varphi,$$

$$\models \varphi \&_{\vee} (\psi \&_{\vee} \chi) \equiv (\varphi \&_{\vee} \psi) \&_{\vee} \chi,$$

$$\models \varphi \& (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi),$$

$$\models \varphi \vee (\psi \& \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi),$$

$$\models \varphi \&_{\vee} \varphi \equiv \varphi,$$

Доказать равносильность методом семантических таблиц.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Запись $\varphi[\psi]$ означает, что формула φ содержит подформулу ψ .
Запись $\varphi[\psi/\chi]$ обозначает формулу, которая образуется из формулы φ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений подформулы ψ на формулу χ .

Теорема

$$\models \psi \equiv \chi \implies \models \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/\chi]$$

Доказательство

Индукцией по числу связок и кванторов в формуле φ

Базис. $\varphi[\psi] = \psi$. Очевидно.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Индуктивный переход. $\varphi[\psi] = \forall x \varphi_1[\psi](x)$.

По индуктивному предположению, если $\models \psi \equiv \chi$, то в любой интерпретации I и для любого элемента $d \in D_I$ верно

$$\begin{aligned} I &\models \varphi_1[\psi](d) \rightarrow \varphi_1[\psi/\chi](d) \\ I &\models \varphi_1[\psi/\chi](d) \rightarrow \varphi_1[\psi](d) \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} I &\models \forall x(\varphi_1[\psi](x) \rightarrow \varphi_1[\psi/\chi](x)) \\ I &\models \forall x(\varphi_1[\psi/\chi](x) \rightarrow \varphi_1[\psi](x)) \end{aligned}$$

Как следует из примера $\models \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$
(см. [Лекция 3](#)),

$$\begin{aligned} I &\models \forall x \varphi_1[\psi](x) \rightarrow \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x) \\ I &\models \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x) \rightarrow \forall x \varphi_1[\psi](x) \end{aligned}$$

(Остальные случаи формулы φ — самостоятельно.)

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$.

$$\models \forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x) \equiv \neg\forall xP(x) \vee \exists xP(x)$$

$$\text{Поскольку } \models \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\text{Поскольку } \models \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\text{Поскольку } \models \exists x \varphi(x) \equiv \exists y \varphi(y)$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$.

$$\models \forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x) \equiv \neg\forall xP(x) \vee \exists xP(x)$$

$$\models \neg\forall xP(x) \vee \exists xP(x) \equiv \exists x\neg P(x) \vee \exists xP(x)$$

$$\models \exists x\neg P(x) \vee \exists xP(x) \equiv \exists x\neg P(x) \vee \exists yP(y)$$

$$\models \exists x\neg P(x) \vee \exists yP(y) \equiv \exists x\exists y(\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\text{Поскольку } \models \exists x\varphi(x) \vee \psi \equiv \exists x(\varphi(x) \vee \psi)$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y) \equiv \exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

Таким образом, вопрос об общезначимости $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ сводится к вопросу об общезначимости $\exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Замкнутая формула φ называется **предваренной нормальной формой (ПНФ)**, если

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n M(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

- ▶ $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ — **кванторная приставка**, состоящая из кванторов $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$,
- ▶ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — **матрица** — бескванторная конъюнктивная нормальная форма (КНФ), т. е.

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N,$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{ik_i}$ — **дизъюнкты**, состоящие из **литер** $L_{ij} = A_{ij}$ или $L_{ij} = \neg A_{ij}$, где A_{ij} — атомарная формула.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\forall x \exists y \exists z \forall u (P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z))),$$

кванторная приставка: $\forall x \exists y \exists z \forall u$

матрица: $P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z))$

дизъюнкты: $D_1 = P(x),$
 $D_2 = \neg R(x, u),$
 $D_3 = \neg P(y) \vee R(x, z)$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ПНФ

Для любой замкнутой формулы φ существует равносильная предваренная нормальная форма ψ .

Доказательство

Замкнутую формулу φ можно привести к ПНФ применением равносильных преобразований. Покажем, как это надо делать на примере формулы

$$\varphi = \neg \exists x((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

1. Переименование переменных.

Применяем равносильности $\models \forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$

$$\varphi = \neg \exists x ((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \ \& \ (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y R(x_1, y))) \rightarrow \exists y R(x_1, y))$$

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \ \& \ (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1))) \rightarrow \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

Применяем равносильность $\models \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \& (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1))) \rightarrow \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \& (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1))) \rightarrow \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

Применяем равносильности

$$\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi,$$

$$\models \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,$$

$$\models \neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \ \& \ (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\neg \neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \neg \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\neg \neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \neg \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\neg \neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \neg \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

Применяем равносильности

$$\models \forall x \varphi(x) \& \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \& \psi),$$

$$\models \forall x \varphi(x) \vee \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \vee \psi),$$

$$\models \varphi \&_{\forall} \psi \equiv \psi \&_{\forall} \varphi.$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1 ((P(x_1) \ \& \ (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \ \& \ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\exists x_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1(\exists x_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \exists x_2((P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

и так далее...

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1(\exists x_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \exists x_2 ((P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

и так далее...

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 ((P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1))) \& \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме.
Применяем законы булевой алгебры.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме.

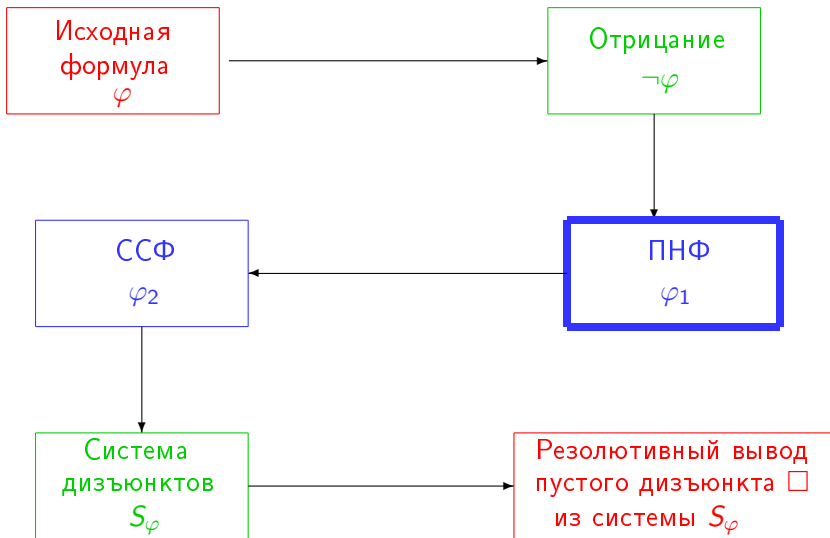
$$\psi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \& \neg R(x_1, y_2))$$

В результате получаем формулу ψ , которая

- ▶ является предваренной нормальной формой,
- ▶ равносильна исходной формуле φ .



ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИИ



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Предваренная нормальная форма вида

$$\varphi = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_m} M(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}),$$

в которой кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$, называется **сколемовской стандартной формой (ССФ)**.

Примеры ССФ

$$\forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$R(c_1, f(c_1, c_2)) \vee P(c_2)$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ССФ

Для любой замкнутой формулы φ существует такая сколемовская стандартная форма ψ , что

$$\varphi \text{ выполнима} \iff \psi \text{ выполнима.}$$

Доказательство

Воспользуемся леммой об удалении кванторов существования .

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Лемма об удалении кванторов существования

Пусть $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ — замкнутая формула, $k \geq 0$, и k -местный функциональный символ $f^{(k)}$ **не содержится** в формуле φ .

Тогда формула φ выполнима в том и только том случае, когда выполнима формула

$$\psi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)).$$

Доказательство леммы.

($\Leftarrow$) Пусть I — модель для ψ .

Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ имеет место

$$I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)],$$

т. е. для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} = f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)$, что

$$I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}].$$

Это означает, что $I \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0$.

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство леммы об удалении $\exists$.

($\Rightarrow$) Пусть I — модель для φ . Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} \in D_I$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.

Пусть $\bar{f} : D_I^k \rightarrow D_I$ — это некоторая функция, вычисляющая для каждого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ такой элемент $d_{k+1} = \bar{f}(d_1, d_2, \dots, d_k)$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.

Рассмотрим интерпретацию I' , которая отличается от I только тем, что оценкой функционального символа $f^{(k)}$ является функция $\bar{f}$.

Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k$ верно $I' \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)]$. (почему?)

Это означает, что

$I' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k))$.



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Продолжение доказательства теоремы об ССФ

Удаляем по очереди кванторы существования с помощью леммы.

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2} \dots x_m, x_{m+1}, \dots)$$

$$\varphi' = \forall x_1 \dots \forall x_k \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), x_{k+2} \dots x_m, x_{m+1}, \dots)$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \dots \forall x_k \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), x_{k+2} \dots x_m, g(x_1, \dots, x_k, x_{k+2}, \dots, x_m), \dots)$$

и. т. д.

При этом выполнимость формул сохраняется.



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi \text{ выполнима} \iff \varphi'' \text{ выполнима.}$$

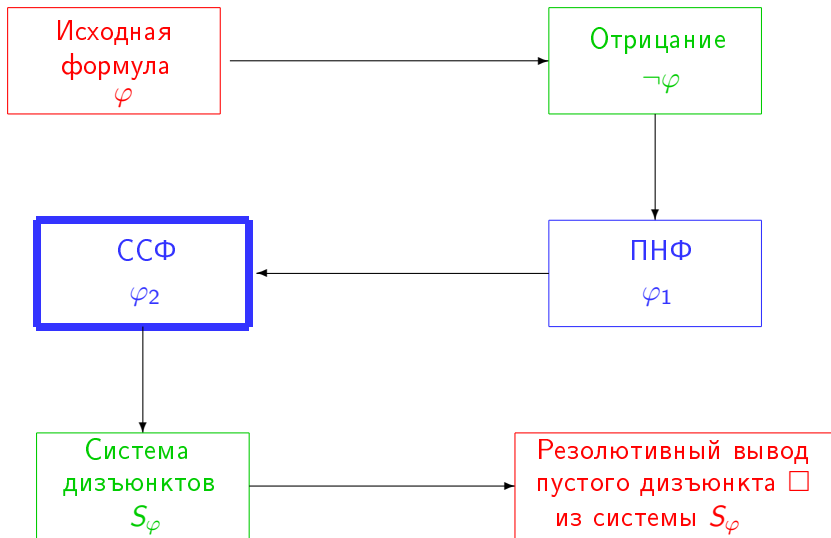
СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Терм $f^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$, который подставляется вместо удаляемой переменной x_{k+1} , связанной квантором $\exists$, называется **сколемовским термом** .

Если $k = 0$, то терм называется **сколемовской константой** .

Процедура удаления кванторов $\exists$ называется **сколемизацией** .

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИИ



СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Утверждение

$$\models \forall x(\varphi \& \psi) \equiv \forall x\varphi \& \forall x\psi$$

Иначе говоря, кванторы $\forall$ можно равномерно распределить по сомножителям (дизъюнктам) КНФ.

Теорема

Сколемовская стандартная форма

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул

$$S_\varphi = \{\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_1, \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_2, \dots, \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_N\}$$

не имеет модели.

СИСТЕМЫ ДИЗЬЮНКТОВ

Каждая формула множества S_φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)$$

и называется **дизъюнктом**.

В дальнейшем (по умолчанию) будем полагать, что все переменные дизъюнкта связаны кванторами $\forall$, и кванторную приставку выписывать **не будем**.

Каждый дизъюнкт состоит из **литер** $L_1, L_2, \dots, L_k$.

Литера — это либо атом, либо отрицание атома.

Особо выделен дизъюнкт, в котором **нет ни одной литеры**.

Такой дизъюнкт называется **пустым дизъюнктом** и обозначается $\square$. Пустой дизъюнкт $\square$ тождественно ложен (**почему?**).

Потому что $\models L_1 \vee \dots \vee L_k \equiv L_1 \vee \dots \vee L_k \vee \mathbf{false}$, и поэтому при $k = 0$ имеем $\models \square \equiv \mathbf{false}$.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Систему дизъюнктов, не имеющую моделей, будем называть **невыполнимой**, или **противоречивой** системой дизъюнктов.

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi ?$$

φ общезначима $\iff \varphi_0 = \neg\varphi$ невыполнима.

φ_0 невыполнима $\iff$ ПНФ φ_1 невыполнима.

φ_1 невыполнима $\iff$ ССФ φ_2 невыполнима.

φ_2 невыполнима $\iff$ система дизъюнктов S_φ невыполнима.

Итак, проверка общезначимости $\models \varphi ?$ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ .

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ: ПРИМЕР

Исходная формула:

$$\varphi = \exists x((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Ее отрицание:

$$\varphi_0 = \neg \exists x((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Предваренная нормальная форма для φ_0 :

$$\varphi_1 = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

Сколемовская стандартная форма:

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ: ПРИМЕР

Система дизъюнктов:

$$S_{\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = P(x_1), \\ D_2 = \neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)), \\ D_3 = \neg R(x_1, y_2) \end{array} \right\}$$

Задача:
как проверить противоречивость
произвольной системы
дизъюнктов?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 6.